BAB II

LANDASAN TEORI

Dalam bab ini dibahas beberapa definisi dan konsep-konsep yang digunakan untuk membahas aplikasi PLFTG untuk investasi portofolio saham.

A. Pemrograman Linear

Pemrograman matematis adalah penyelesaian masalah optimasi yang dihadapkan dengan kendala yang berbentuk pertidaksamaan. Pemrograman matematis dibedakan menjadi dua yaitu pemrograman linear dan tidak linear. Pemrograman linear adalah jenis yang paling sederhana dari permasalahan pemrograman yang fungsi tujuan dan kendala pertidaksamaan berbentuk linear. Tiga hal utama yang diperhatikan pada pemrograman linear adalah fungsi tujuan, fungsi kendala dan fungsi kendala non negatif (Chiang, 1993).

Pada pemrograman linier hal pokok yang harus ditemukan adalah pemaksimalan atau peminimalan fungsi tujuan terhadap kendala-kendala dengan langkah-langkah sebagai berikut (Siswanto, 2007):

1. Menyatakan tujuan ke dalam sebuah kalimat

   Dalam hal perumusan tujuan harus memperhatikan apakah tujuan hendak diminimalkan/dimaksimalkan.

2. Menyatakan kendala ke dalam sebuah kalimat

   Dalam hal perumusan kendala harus memperhatikan bentuk dari kendala, apakah berupa pembatas, yaitu tidak boleh lebih dari suatu nilai tertentu;

berupa syarat, yaitu tidak boleh kurang dari nilai tertentu; atau berupa keharusan, yaitu sama dengan nilai tertentu.

3. Menemukan variabel keputusan

   Pedoman yang sering digunakan untuk menemukan variabel keputusan adalah pembuatan pertanyaan kepada diri sendiri yaitu:

   "Keputusan apa yang harus dibuat agar nilai fungsi tujuan menjadi maksimal/minimal?"

4. Merumuskan model matematis

   Setelah tiga langkah pertama itu dilakukan maka sebagai langkah berikutnya secara berurutan adalah:

a. Menyatakan variabel keputusan ke dalam simbol matematika misal $x_1, x_2, \dots, x_n$.
b. Menyatakan fungsi tujuan ke dalam bentuk matematika.
c. Menyatakan fungsi kendala ke dalam bentuk matematika.
d. Karakteristik linear, yang mengisyaratkan bahwa seluruh fungsi matematika adalah linear.

Jika terdapat *n* variabel keputusan x_i, *m* kendala dan k_i sebagai konstanta, bentuk pemrograman linear dengan tujuan meminimalkan/memaksimalkan fungsi *f* dapat ditulis sebagai berikut

$$\text{Meminimalkan/memaksimalkan} \quad f = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n \tag{2.1}$$

$$\begin{aligned} \text{dengan kendala} \quad & b_{11}x_1 + b_{12}x_2 + \dots + b_{1n}x_n \geq, \leq, = k_1 \\ & b_{21}x_1 + b_{22}x_2 + \dots + b_{2n}x_n \geq, \leq, = k_2 \\ & \vdots \qquad\quad \vdots \qquad\quad \vdots \qquad\qquad \vdots \\ & b_{m1}x_1 + b_{m2}x_2 + \dots + b_{mn}x_n \geq, \leq, = k_n \end{aligned}$$

$x_1, x_2, \ldots, x_n > 0$.

Program linier dalam sering digunakan untuk menyelesaikan masalah optimasi dalam kehidupan sehari-hari. Seperti pada Contoh 2.1 berikut ini:

Contoh 2.1. PT. Jaya memproduksi dompet kulit dan gantungan kunci. Proses pembuatan dompet kulit melalui tiga mesin, yaitu 2 menit pada mesin I, 8 menit pada mesin II, dan 10 menit pada mesin III. Adapun gantungan kunci diprosesnya melalui dua

mesin, yaitu 5 menit pada mesin I dan 4 menit pada mesin II. Tiap mesin ini dapat dioperasikan 800 menit per hari. Perusahaan memberikan harga Rp50.000,00 dari setiap penjualan dompet kulit dan Rp30.000,00 dari setiap penjualan gantungan kunci. Berdasarkan harga tersebut, maka pihak perusahaan akan memproduksi dompet kulit dan banyak gantungan kunci sebanyak-banyaknya dalam sehari, bagaimana model matematikanya?

Tujuan perusahaan adalah memaksimalkan produksi dompet dan gantungan kunci. Produksi dompet melalui 3 mesin yaitu 2 menit pada mesin I, 8 menit pada mesin II, dan 10 menit pada mesin III dan gantungan kunci Adapun gantungan kunci prosesnya melalui dua mesin, yaitu 5 menit pada mesin I dan 4 menit pada mesin II. Mesin I, II, dan III masing-masing tidak boleh beroperasi lebih 800 menit per hari. Perusahaan harus memproduksi dompet dan gantungan kunci sebanyak-banyaknya.

Jika banyak dompet kulit yang diproduksi dinyatakan sebagai x dan banyak gantungan kunci yang diproduksi dinyatakan sebagai y, dengan x dan y bilangan asli. Dengan menggunakan variabel x dan y tersebut, model matematika yang dapat disusun sebagai berikut:

Maksimalkan $f(x, y) = 50.000x + 30.000y$.

dengan kendala

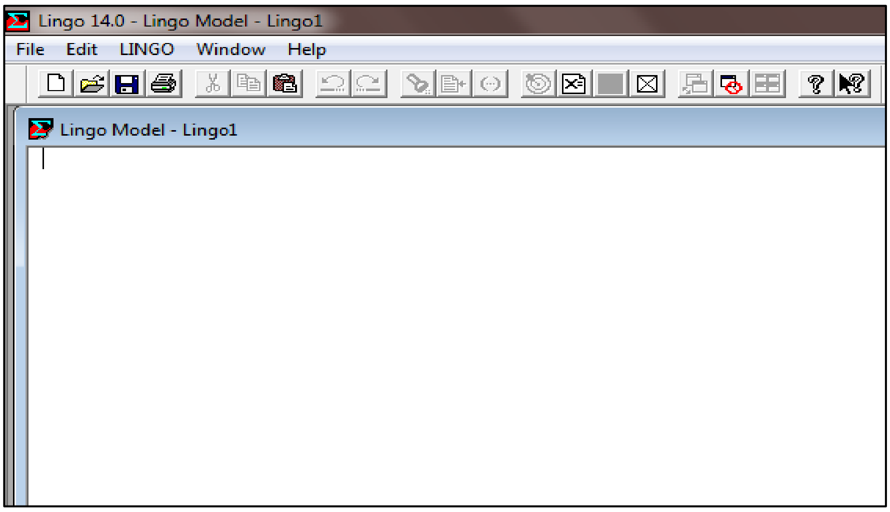
I : $2x + 5y \leq 800$

$8x + 4y \leq 800$

$10\ x\ \leq 800$. x, y bilangan asli : $x \geq 0$, $y \geq 0$.

B. LINGO

LINGO merupakan program komputer yang dapat digunakan untuk menyelesaikan permasalahan optimasi yang bervariasi. Menyelesaikan permasalahan optimasi dengan model linear programming atau goal programming dapat dengan mudahnya dilakukan dengan program komputer ini. Perhitungan yang sangat cepat dengan program komputer ini akan sangat membantu untuk menyelesaikan model dengan kendala yang cukup banyak. LINGO merupakan program komputer berbayar, tapi bagi yang ingin mendapatkan secara gratis dapat memilih versi demonya. Penulis menggunakan LINGO versi 14.0 pada tulisan ini. Penggunaan program LINGO 14.0 cukup mudah. Pertama, buka program tersebut sehingga tampil pada layar komputer tampilan sebagai berikut.



Gambar 2.1 Tampilan awal program LINGO 14.0

Cara untuk meng-input skrip dilakukan seperti mengetik tulisan biasa setelah tampilan Lingo seperti Gambar 2.1. Contoh skrip untuk menyelesaikan suatu permasalahan linear programming.

Contoh 2.2.

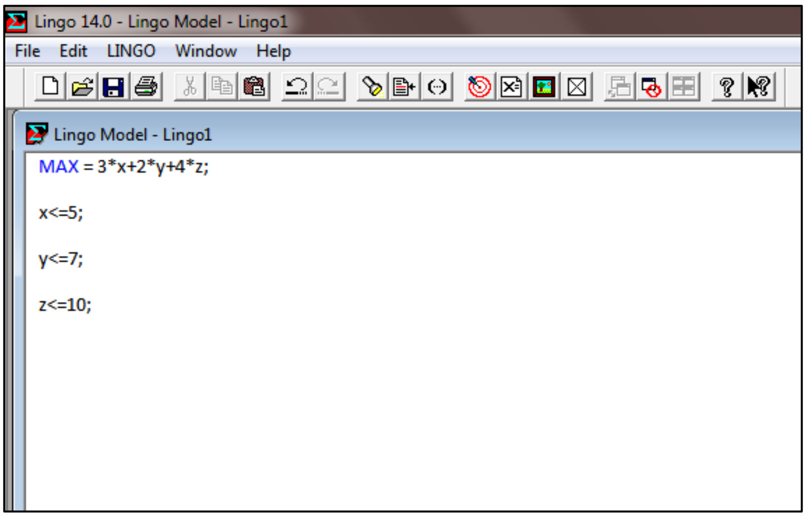
$$\text{Maksimalkan } 3x + 2y + 4z$$

Dengan kendala:

$$x <= 5;\ y <= 7;\ z <= 10$$

adalah sebagai berikut:

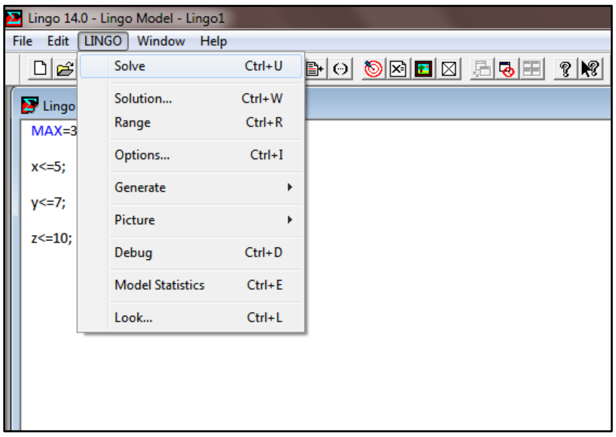
```
MAX=3*x+2*y+4*z;
x<=5;
y<=7;
z<=10.
```



Gambar 2.2 Tampilan input program LINGO 14.0

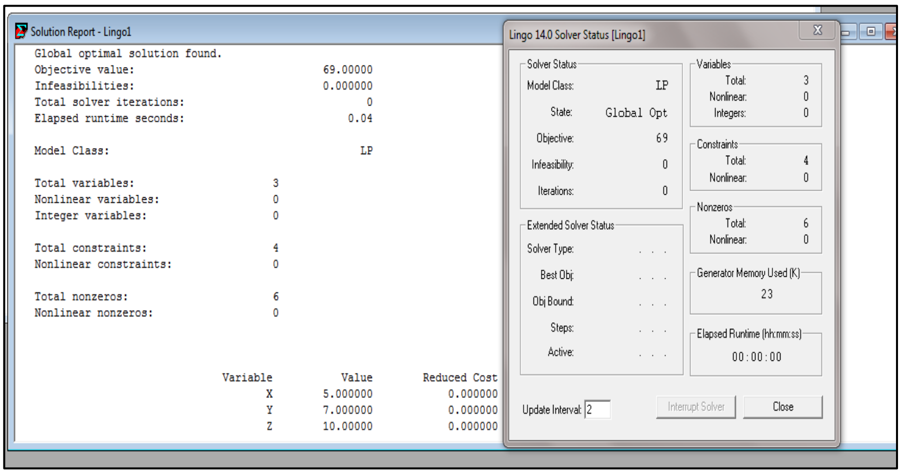
Tampilan yang muncul saat mengetik skrip seperti pada Gambar 2.2. Langkah-langkah berikut ini dilakukan untuk memerintahkan program komputer LINGO 14.0 untuk memulai penghitungan.

1. Pilih menu “LINGO”
2. Pilih submenu “Solve”



Gambar 2.3 Tampilan menu untuk menjalankan program LINGO14.0

Hasil output yang akan diperoleh setelah menjalankan program seperti pada Gambar 2.3 akan muncul tampilan sebagai berikut.



Gambar 2.4 Tampilan output program LINGO 14.0

Gambar 2.4 adalah tampilan solusi yang diperoleh dari Contoh 2.2, setelah menjalankan perintah seperti Gambar 2.3.

C. Program Linier Tujuan Ganda

Program linier tujuan ganda atau PLTG merupakan program linier yang fungsi tujuannya lebih dari satu yang dibatasi oleh beberapa fungsi kendala. Sebelum menuliskan bentuk umum PLTG, sebaiknya terlebih dahulu memahami cara-cara memformulasikan PLTG yang hampir sama dengan program linier, yaitu:

1. Memilih model linier yang sesuai dengan permasalahan.
2. Menetapkan variabel-variabel pengambilan keputusan.
3. Menetapkan fungsi tujuan dan fungsi kendala.

Berikut ini bentuk umum dari PLTG (Sakawa, 1993)

Meminimalkan/memaksimalkan

$$f_1 = c_{11}x_1 + c_{12}x_2 + \dots + c_{1n}x_n \tag{2.2}$$

$$f_2 = c_{21}x_1 + c_{22}x_2 + \dots + c_{2n}x_n \tag{2.3}$$

dengan kendala

$$\begin{aligned}
&b_{11}x_1 + b_{12}x_2 + \dots + b_{1n}x_n (\geq, \leq, =)\, k_1 \\
&b_{21}x_1 + b_{22}x_2 + \dots + b_{2n}x_n (\geq, \leq, =)\, k_2 \\
&\vdots \qquad\quad \vdots \qquad\quad \vdots \qquad\quad \vdots \\
&b_{m1}x_1 + b_{m2}x_2 + \dots + b_{mn}x_n (\geq, \leq, =)\, k_n \\
&x_1, x_2, \dots, x_n \geq 0.
\end{aligned}$$

Masalah program linier tujuan ganda adalah masalah program linier dengan lebih dari satu tujuan seperti pada contoh berikut:

Contoh 2.3. Suatu perusahaan memiliki pabrik yang menghasilkan 3 produk almari, yaitu almari A, almari B, almari C dalam satu bulan. Pabrik tersebut membutuhkan 3 kayu gelondongan untuk membuat 1 unit almari A, 4 kayu gelondongan untuk menghasilkan 1 unit almari B dan 2 kayu gelondongan untuk menghasilkan 1 unit almari C. Banyaknya kayu gelondongan yang tersedia adalah sebanyak 300 kayu gelondongan. Dalam 1 bulan mesin menyala untuk membuat almari minimal 100 unit. Perusahaan mengharapkan dapat menjual almari A sebesar Rp780.000/unit, almari B sebesar Rp390.000/unit dan almari C sebesar Rp520.000/unit. Namun, selama proses produksi,1 unit almari A akan membutuhkan ongkos Rp130.000/unit , 1 unit almari B akan membutuhkan ongkos Rp65.000/unit, dan 1 unit almari C membutuhkan ongkos Rp100.000/unit.

Pabrik tersebut ingin memaksimalkan pendapatan sekaligus meminimumkan ongkos yang dibutuhkan.

Jika banyak almari A, almari B, dan almari C yang diproduksi dinyatakan sebagai variabel x_1, x_2, x_3. Permasalahan tersebut dapat diekspresikan sebagai program linier tujuan ganda sebagai berikut:

memaksimumkan: $z_1 = 780.000x_1 + 390.000x_2 + 520.000x_3$

meminimumkan: $z_2 = 130.000\,x_1 + 65.000x_2 + 100.000x_3$

dengan kendala:

$3x_1 + 4x_2 + 2x_3 \leq 300$,

$x_1 + x_2 + x_3 \geq 100$,

$x_1, x_2, x_3 \geq 0$.

Masalah tersebut akan coba diselesaikan dengan mengoptimalkan masing-masing fungsi tujuan dengan bantuan LINGO.

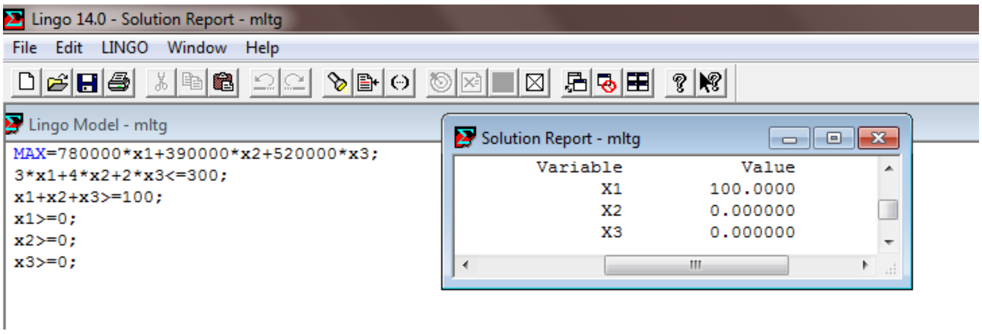
Memaksimumkan z_1

dengan kendala:

$3x_1 + 4x_2 + 2x_3 \leq 300$

$x_1 + x_2 + x_3 \geq 100$

$x_1, x_2, x_3 \geq 0$.



Gambar 2.5 Solusi maksimal Contoh 2.3

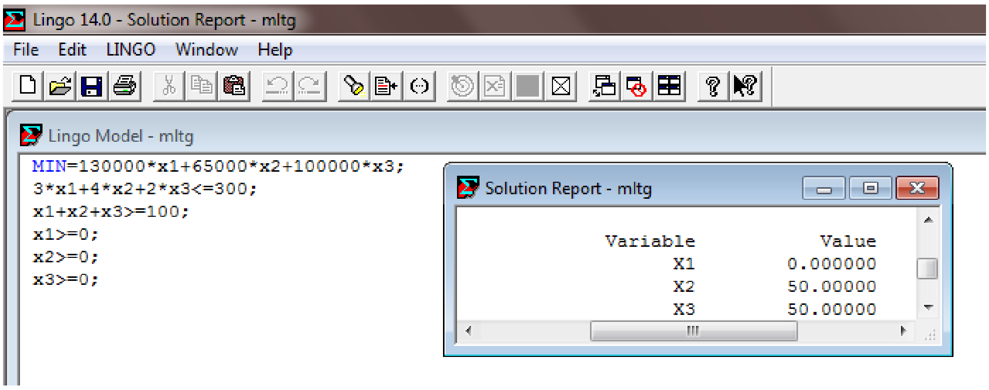
meminimumkan z_2

dengan kendala:

$3x_1 + 4x_2 + 2x_3 \leq 300$

$x_1 + x_2 + x_3 \geq 100$

$x_1, x_2, x_3 \geq 0.$



Gambar 2.6 Solusi minimal Contoh 2.3

Solusi dari masing-masing fungsi tujuan yang telah dicari dengan LINGO14.0 seperti pada Gambar 2.5 dan 2.6 akan disajikan dalam Tabel 2.1 berikut:

Tabel 2.1 Solusi Contoh 2.2.

	x_1	x_2	x_3	Solusi
Maksimal	100	0	0	78000000
minimal	0	50	50	8250000

Solusi yang diperoleh akan coba dimasukkan untuk melihat berapa nilai solusi fungsi tujuan z_1 yang dimasukkan ke fungsi z_2, begitu juga sebaliknya.

Tabel 2.2 Nilai z_1 dan z_2.

x_1	x_2	x_3	z_1	z_2
100	0	0	78000000	13000000
0	50	50	45500000	8250000

Solusi yang didapatkan pada fungsi tujuan memaksimalkan pendapatan (z_1) ternyata menghasilkan nilai pengeluaran ongkos (z_2) cukup tinggi, sebaliknya untuk mendapatkan nilai ongkos minimal maka nilai maksimal pendapatan yang diperoleh akan menurun. Penyelesaian seperti ini seperti penyelesaian penawaran, Pemilik perusahaan harus memilih antara pendapatan maksimal atau ongkos minimal.

Penulis memberikan Contoh 2.2 sebagai gambaran masalah PLTG yang memiliki solusi yang sulit untu ditentukan. Dalam tulisan ini Penulis menggunakan PLFTG untuk masalah PLTG.

D. Investasi

Investasi dapat diartikan sebagai kegiatan mananamkan modal baik langsung maupun tidak langsung, dengan harapan pada waktunya nanti pemilik modal mendapatkan sejumlah keuntungan dari hasil penanaman modal tersebut (Hamid, 1995).

Secara sederhana seperti jika membeli tanah, saat tanah itu dibeli dengan harga Rp. 800.000,00/m^2 setelah 2 tahun harga tanah itu menjadi Rp 1.200.000,00/m^2. Harga tanah tersebut meningkat sebesar 50% dari hasil investasi pada sebidang tanah.

Investasi pada saham mempunyai perbedaan dengan pembelian tanah, Investasi dengan pembelian tanah secara umum lebih aman karena harganya cenderung naik, berbeda dengan saham mempunyai pergerakan harga yang lebih dinamis. Investor akan memperhatikan besarnya *expected return* dan kecilnya risiko pada saham yang akan dibeli.

1. Teori *Return*

Return merupakan salah satu faktor yang memotivasi investor berinvestasi dan juga merupakan imbalan atas keberanian investor menanggung risiko investasi yang dilakukannya (Eduardus, 2001). Tujuan investor dalam berinvestasi adalah mendapatkan *return* yang besar, tanpa melupakan faktor risiko investasi yang harus dihadapinya. *Return* dapat berupa *realized return* dan *expected return. Realized return* adalah *return* yang sudah terjadi dan *expected return* adalah *return* yang diharapkan terjadi di masa datang. *Realized return* dihitung berdasarkan data historis (Jogiyanto, 2014). *Realized return* dihitung dirumuskan sebagai berikut:

$$R_t = \frac{P_t - P_{t-1}}{P_{t-1}} \tag{2. 4}$$

dengan

R_t= *return realized* pada saat t

P_t= harga investasi pada saat t

P_{t-1}= harga investasi pada saat t-1.

Contoh 2.4. Harga saham "x" yang diberikan pada Tabel 2.3 di bawah ini (dalam rupiah), akan dihitung *realized return* dari saham tersebut.

Tabel 2.3 Contoh harga saham

T	Harga
0	22025
1	21500
2	22800
3	22500

Tabel 2.3 adalah contoh data saham 4 pengamatan. *Realized return* pada Contoh 2.4 akan dihitung menggunakan Persamaan (2.4).

$$R_1 = \frac{21500 - 22025}{22025}$$

$$= -0{,}023837$$

$$R_2 = \frac{22800 - 21500}{21500}$$

$$=0{,}060465$$

$$R_3 = \frac{22500 - 22800}{22800}$$

$$= -0{,}013158.$$

Expected return merupakan rata-rata dari *realized return* masing-masing saham. *Expected return* dapat dinyatakan secara sistematis sebagai berikut (Jogianto, 2010) :

$$E(R) = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} R_t \qquad (2.\ 5)$$

dengan

$E(R)$ = *expected return* saham

R_t = *realized return* saham pada saat t

T = banyaknya *realized return.*

Contoh 2.5. *Expected return* untuk saham pada Tabel 2.3 akan dihitung menggunakan Persamaan (2.5) dengan menggunakan *realized return*nya telah dihitung pada Contoh 2.4 sehingga perhitungannya seperti berikut:

$$E(R) = \frac{1}{3}\sum_{t=1}^{3} R_t$$

$$= \frac{1}{3}(-0{,}023837 + 0{,}060465 - 0{,}013158)$$

$$= 0{,}007823.$$

Expected return dari data pada Tabel 2.4 adalah 0,007823

2. Risiko

Menurut Wardani (2010) risiko adalah kemungkinan penyimpangan *realized return* dengan *expected return*. Semakin besar tingkat perbedaan antara *realized return* dengan *expected return* semakin besar pula tingkat risikonya.

Saham yang memiliki kenaikan signifikan atau harganya naik sangat tinggi, mempunyai nilai risiko yang besar, karena menyimpang jauh dari nilai rataannya, karena jika suatu saham naik dengan tinggi pasti memiliki faktor yang mempengaruhi saham tersebut naik, jika faktor itu hilang maka ada kemungkinan saham juga akan turun drastis. Saham yang memiliki nilai risiko rendah adalah saham yang cenderung berada digaris rata-rata atau harganya stabil (naik turunnya tidak terlalu jauh). Pembentukan portofolio dapat menggunakan metode *Mean Varians* (MV). Metode MV pertama kali diperkenalkan oleh Markowitz (1952). Metode MV digunakan membentuk potofolio yang optimal menggunakan teknik optimasi model kuadratik. Perhitungan metode MV fungsi tujuannya adalah meminimalkan risiko yang berbentuk fungsi kuadrat (Markowitz, 1952). Pembentukan portofolio dengan metode ini dianggap oleh para ahli cenderung lebih rumit karena fungsi tujuan yang berbentuk kuadratik harus melalui perhitungan yang kompleks. Atas dasar itu, Konno & Yamazaki (1991). mengembangkan metode yang bernama *Mean Absolute Deviation* (*MAD*) Persamaan yang digunakan seperti berikut (Konno & Yamazaki, 1991):

$$a_t = \left| R_t - E(R) \right| \tag{2.6}$$

dengan

a_t adalah risiko pada saat t

R_t adalah *return realized* pada saat t

$E(R)$ adalah *expected return.*

Contoh 2.6. Risiko saham “x” dengan data harga saham pada Tabel 2.3 dapat dihitung dengan menggunakan Persamaan (2.6) perhitungannya akan seperti berikut:

$a_1 = |-0{,}023837 - 0{,}023470|$

$=0{,}047307$

$a_2 = |0{,}060465 - 0{,}023470|$

$=0{,}036995$

$a_3 = |-0{,}013158 - 0{,}023470|$

$=0{,}036628.$

1. Portofolio

Portofolio diartikan sebagai serangkaian beberapa aktiva yang diinvestasikan dan dipegang oleh investor, baik perseorangan maupun lembaga(Wardani, 2010). Portofolio dapat diartikan sebagai kombinasi beberapa saham yang diinvestasi oleh investor, baik peorangan maupun lembaga dengan memperhatikan *expected return* dan risiko dari masing-masing saham.

Expected return untuk portofolio adalah rata-rata terbobot dari *expected return* masing-masing saham di dalam portofolio. *Expected return* portofolio dapat dinyatakan secara sistematis sebagai berikut (Jogianto, 2010) :

$$M(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i E(R)_i \quad (2.7)$$

dengan,

$M(x)$ = *expected return* portofolio

x_i = bobot investasi saham ke-*i*

$E(R)_i$ = *expected return* saham ke-*i*

n = banyaknya saham.

Investor akan mencari *Expected return* portofolio yang tinggi, tapi harus diingat bahwa untuk membentuk portofolio investor juga perlu memperhatikan risiko portofolionya. Markowitz dalam (Jogianto, 2010) mengatakan risiko dalam investasi saham dapat dikurangi dengan menggabungkan beberapa saham menjadi portofolio. Saham-saham yang tergabung dalam portofolio tersebut memiliki bobot masing- masing yang tujuannya untuk mengurangi risiko. Risiko dalam portofolio dirumuskan sebagai berikut (Konno & Yamazaki. 1991.):

$$\mathrm{V(x)} = \frac{1}{T}\sum_{\mathrm{i=1}}^{\mathrm{n}}\left|\sum_{\mathrm{t=1}}^{\mathrm{T}}\mathrm{R_t} - \mathrm{E(R)}_i\right| \mathrm{x_i} \tag{2.8}$$

dengan,

$V(x)$ adalah risiko portofolio

$\mathrm{R_t}$ adalah *realized return* pada saat t

$\mathrm{E(R)}$ adalah *expected return* saham ke i

T adalah banyaknya periode pengamatan suatu saham

n adalah banyaknya saham

$\mathrm{x_i}$ adalah bobot investasi saham ke i.

Dalam tulisan ini penulis memberikan 3 contoh bentuk portofolio yang berbeda, berdasarkan alokasi maksimal pada setiap sahamnya.

E. Himpunan *Fuzzy*

Himpunan *fuzzy* pertama kali diperkenalkan oleh Lotfi A. Zadeh pada tahun 1965. Nilai keanggotaan menjadi ciri utama dari penalaran dalam himpunan *fuzzy*. Pada himpunan tegas (*crisp) A*, nilai keanggotaan *x* dalam suatu himpunan A memiliki dua kemungkinan. Pertama adalah satu (1) yang berarti bahwa *x* menjadi anggota dalam himpunan A. Kedua adalah nol (0) yang berarti bahwa *x* tidak menjadi anggota dalam himpunan A, atau dapat ditulis seperti berikut:

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 1, \text{jika } x \in A \\ 0, \text{jika } x \notin A \end{cases} \tag{2.9}$$

Himpunan *fuzzy* merupakan perkembangan dari himpunan tegas, dengan memberikan nilai keanggotaan berupa bilangan real dalam [0,1] pada setiap anggota himpunan.

Definisi 2.1 (Sakawa, 1993)

Misalkan X himpunan semesta. Himpunan A adalah himpunan *fuzzy* dari *X*, jika terdapat fungsi karakteristik μ_A (x) untuk x$\in$ X yang dinyatakan dengan bilangan real di dalam interval [0 1]. μ_A (x) disebut fungsi keanggotaan A, dengan μ_A (x) menyatakan nilai keanggotaan x di dalam A. Suatu himpunan *fuzzy* A di X dapat didefinisikan sebagai berikut:

$$A = \{(x, \mu_A(x)) \mid x \in X\} \tag{2.10}$$

1. Operasi pada Himpunan *Fuzzy*

Pada himpunan *fuzzy* ada 3 operasi dasar yang dapat digunakan, ketiga operasi tersebut yaitu sebagai berikut.

a. Irisan (*Intersection*)

A dan *B* adalah himpunan *fuzzy* dari himpunan universal U. Notasi $A \cap B$ merupakan bentuk umum operasi irisan himpunan *fuzzy* padaA dan B yang didefinisikan fungsi keanggotaan sebagai berikut (George J.Klir, 1997).

$$\mu_{(A \cap B)}(x) = \min[\mu_A(x), \mu_B(x)] \tag{2.11}$$

Contoh 2.7. Diketahui derajat keanggotaan $x = 0{,}14075$ pada himpunan A adalah 0,3508 dan derajat keanggotaan $x = 0{,}14075$ pada himpunan B adalah 0,6492, maka

$$\mu_{A \cap B}\,(0{,}14075) = \min(\mu_A[0{,}14075\,], \mu_B[0{,}14075\,])$$
$$= \min(0{,}3508; 0{,}6492)$$
$$= 0{,}3508.$$

b. Gabungan (*Union*)

Himpunan A dan B adalah himpunan *fuzzy* dari himpunan universal U. Notasi A ∪ B merupakan bentuk umum opersi gabungan himpunan *fuzzy* pada *A* dan B yang didefinisikan fungsi keanggotaan sebagai berikut (George J.Klir, 1997).

$$\mu_{(A \cup B)}(x) = \max[\mu_A(x) \cup \mu_B(x)] \qquad (2.12)$$

Contoh 2.8. Diketahui derajat keanggotaan $x = 0{,}14075$ pada himpunan A adalah 0.3508 dan derajat keanggotaan $x = 0{,}14075$ pada himpunan B adalah $0{,}6492$, maka

$$\mu_{(A \cup B)}(0{,}14075) = \max(\mu_A[0{,}14075], \mu_B[0{,}14075])$$
$$= \max(0{,}3508\,; 0{,}6492)$$
$$= 0.6492.$$

c. Komplemen (*Complement*)

A adalah himpunan *fuzzy* dari himpunan universal U. Sehingga operasi himpunan *fuzzy* komplemen pada *A* dinotasikan "$\bar{A}$" yang didefinisikan fungsi keanggotaan sebagai berikut (J.Klir, 1997):

$$\mu_{\bar{A}}(x) = 1 - \mu_A(x) \qquad (2.13)$$

Contoh 2.9. Diketahui derajat keanggotaan $x = 0{,}14075$ pada himpunan adalah $0{,}6492$, maka komplemen derajat keanggotaan $x = 0{,}14075$ pada himpunan A sebagai berikut:

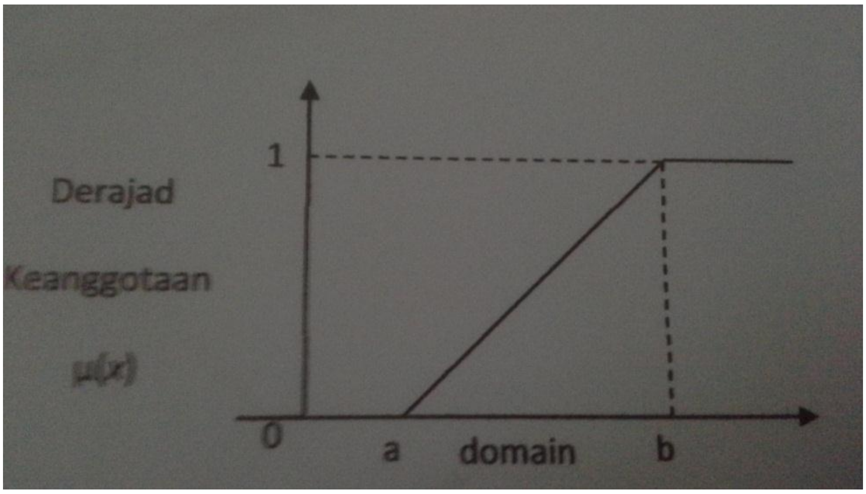
$\mu_{\bar{A}}(0{,}14075) = 1 - \mu_A(0{,}14075) = 1 - 0{,}6492 = 0{,}3508.$

2. Representasi Fungsi Keanggotaan

Ada beberapa jenis representasi fungsi keanggotaan menurut Cox (1994) diantaranya:

a. Representasi Linier

Bentuk ini paling sederhana untuk mendekati suatu konsep yang kurang jelas. Ada 2 keadaan himpunan *fuzzy* yang linear. Pertama, himpunan dimulai pada anggota himpunan *fuzzy* yang memiliki derajad keanggotaan 0 bergerak ke kanan menuju ke anggota himpunan *fuzzy* yang memiliki derajad keanggotaan lebih tinggi (Gambar 2.7).



Gambar 2.7 Representasi linear naik

Fungsi keanggotaan:

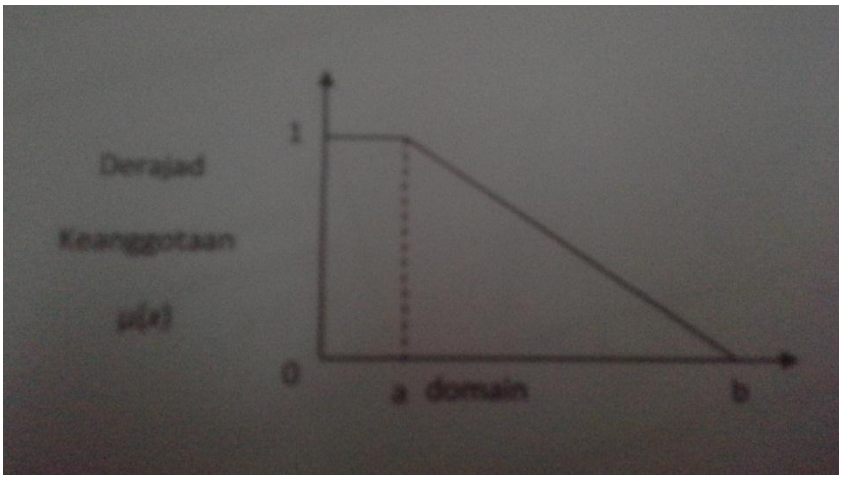
$$\mu(x) = \begin{cases} 0, & x \leq a \\ \frac{x-a}{b-a}, & a \leq x \leq b \\ 1, & x \geq b. \end{cases} \quad (2.14)$$

Kedua, merupakan kebalikan fungsi keanggotaan Persamaan (2.14).

Fungsi keanggotaan:

$$\mu(x) = \begin{cases} 1, & x \leq a \\ \frac{b-x}{b-a}, & a \leq x \leq b \\ 0, & x \geq b. \end{cases} \quad (2.15)$$

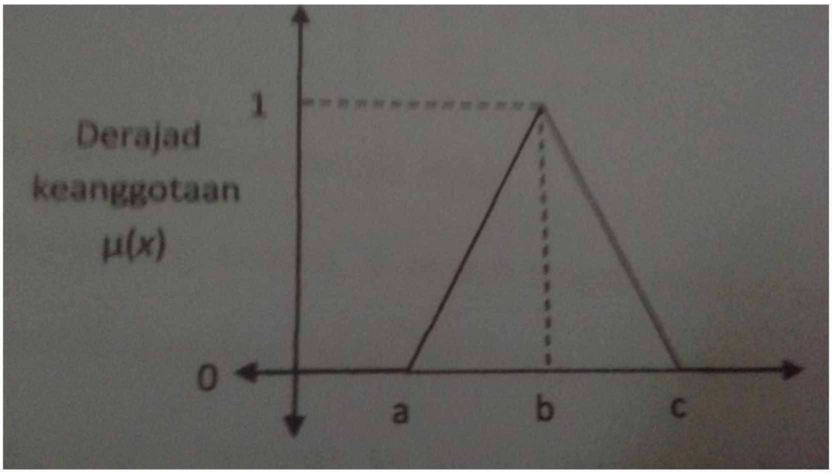
Persamaan 2.15 dapat dipresentasikan seperti pada gambar 2.8 berikut.



Gambar 2.8 Representasi linear turun

b. Representasi Kurva Segitiga

Kurva segitiga pada dasarnya adalah gabungan dari dua garis (linear) seperti pada Gambar 2.9 berikut.



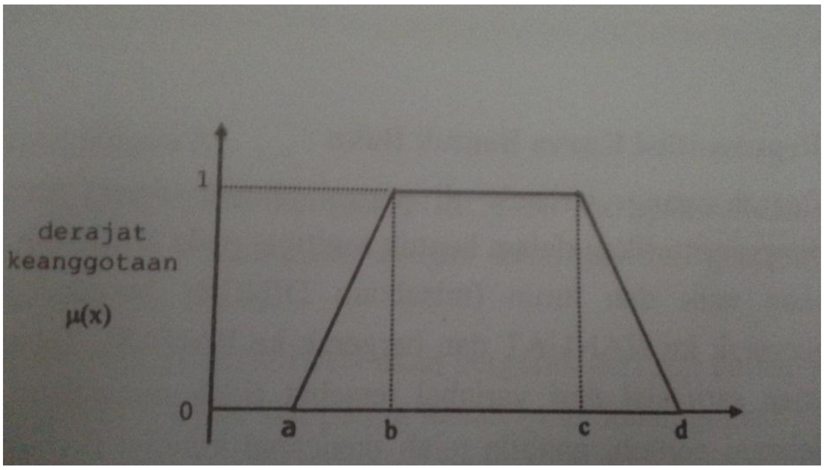
Gambar 2.9 Representasi segitiga

Fungsi keanggotaan segitiga diidentifikasikan tiga parameter a, b, dan c yang dirumuskan dengan fungsi:

$$\mu_{\bar{A}}(x) = \begin{cases} 0, x \leq a \text{ atau } x \geq c \\ \frac{x-a}{b-a}, a \leq x \leq b \\ \frac{c-x}{c-b}, b < x \leq c. \end{cases} \tag{2.16}$$

c. Representasi Kurva Trapesium

Kurva trapesium pada dasarnya seperti bentuk segitiga, hanya saja ada beberapa titik yang memiliki nilai keanggotaan 1 (Gambar 2.10).



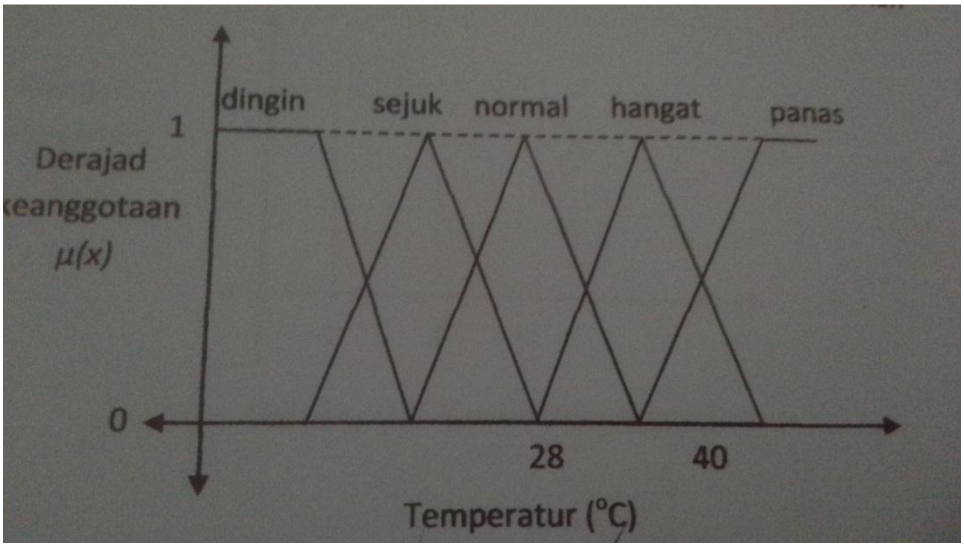
Gambar 2.10 Representasi trapesium

Fungsi keanggotaan:

$$\mu(x) = \begin{cases} 0, & x \leq a \text{ dan } x \geq d \\ \frac{x-a}{b-a}, & a < x < b \\ 1, & b \leq x \leq c \\ \frac{d-x}{d-c}, & x > d. \end{cases} \tag{2.17}$$

d. Representasi Kurva Bentuk Bahu

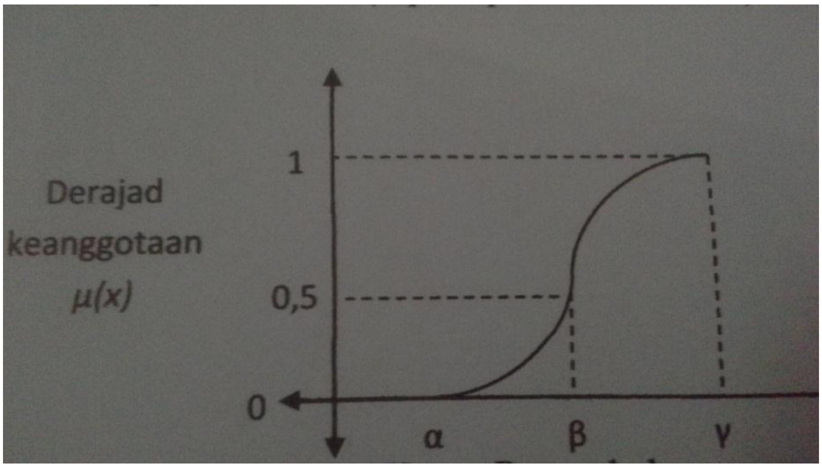
Daerah yang terletak di tengah-tengah variabel yang direpresentasikan dalam bentuk segitiga, pada sisi kanan dan kirinya akan naik dan turun (misalkan: dingin bergerak ke sejuk bergerak ke hangat dan bergerak ke panas). Tetapi terkadang salah satu sisi dari variabel tersebut tidak mengalami perubahan. Sebagai contoh, apabila telah mencapai kondisi panas, kenaikan temperatur akan tetap berada pada kondisi panas. Himpunan *fuzzy* ‘bahu’, bukan segitiga, digunakan untuk mengakhiri variabel suatu daerah *fuzzy*. Bahu kiri bergerak dari benar ke salah, demikian juga bahu kanan bergerak dari salah ke benar (Gambar 2.11).



Gambar 2.11 Daerah bahu pada variabel temperature

e. Representasi Kurva S

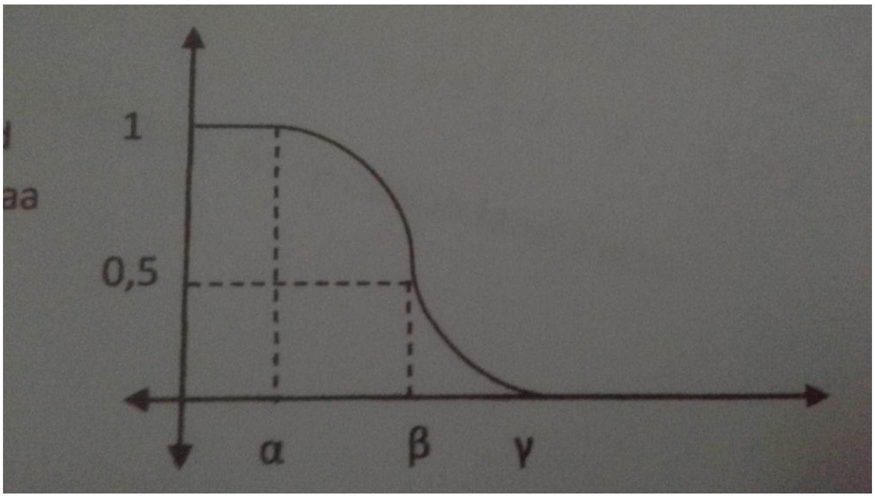
Kurva S atau *sigmoid* merupakan kurva yang berhubungan dengan kenaikan dan penurunan permukaan secara tidak linear. Ada dua macam kurva S yaitu kurva pertumbuhan (seperti pada Gambar 2.12) dan penyusutan (seperti pada Gambar 2.13).



Gambar 2.12 Kurva pertumbuhan

Fungsi keanggotaan kurva pertumbuhan:

$$S(x,\alpha,\beta,\gamma)=\begin{cases} 0, & x\le\alpha \\ 2\left(\frac{x-\alpha}{\gamma-\alpha}\right)^2, & \alpha< x\le\beta \\ 1-2\left(\frac{\gamma-x}{\gamma-\alpha}\right)^2, & \beta\le x<\gamma \\ 1, & x\ge\gamma. \end{cases} \quad (2.18)$$



Gambar 2.13 Kurva penyusutan

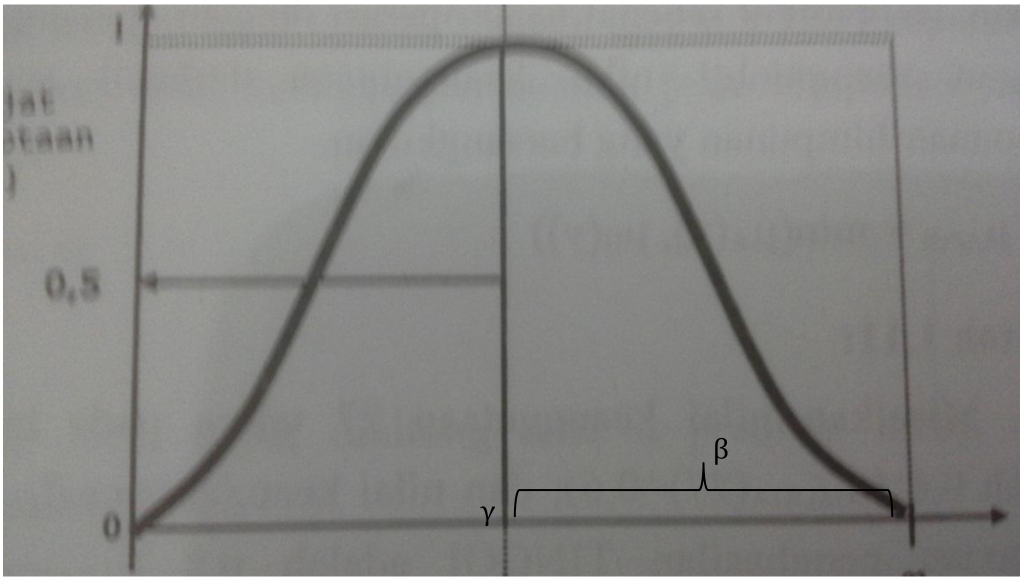
Fungsi keanggotaan kurva penyusutan:

$$S(x,\alpha,\beta,\gamma)=\begin{cases} 1, & x\le\alpha \\ 1-2\left(\frac{x-\alpha}{\gamma-\alpha}\right)^2, & \alpha<x\le\beta \\ 2\left(\frac{\gamma-x}{\gamma-\alpha}\right)^2, & \beta\le x<\gamma \\ 0, & x\ge\gamma \end{cases} \quad (2.19)$$

f. Representasi Kurva Bentuk Lonceng

Kurva berbentuk lonceng terbagi atas 3 kelas, yaitu himpunan *fuzzy* PI, BETA, dan GAUSS.

Kurva Pi



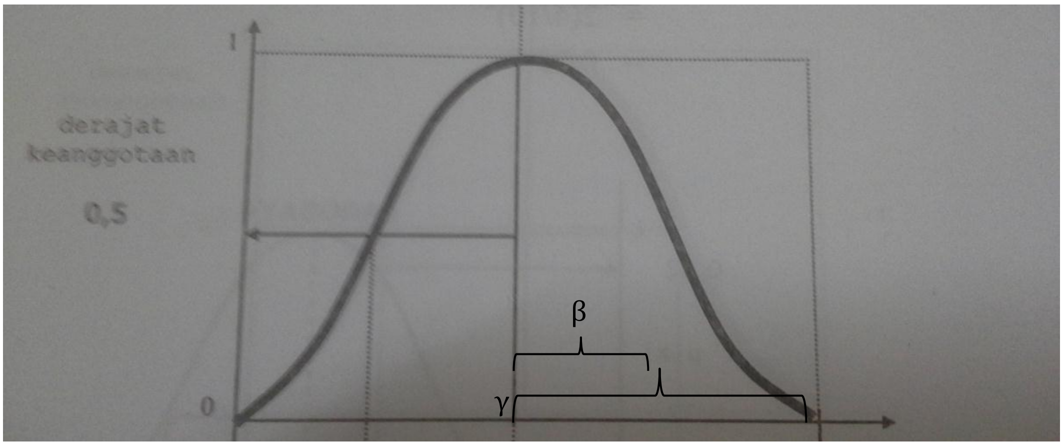
Gambar 2.14 Representasi kurva PI

Fungsi keanggotaan kurva PI dinotasikan sebagai berikut.

$$\pi(x,\beta,\gamma) = \begin{cases} S\left(x,\gamma-\beta,\gamma-\frac{\beta}{2},\gamma\right), & x \le \gamma \\ 1 - S\left(x,\gamma,\gamma+\frac{\beta}{2},\gamma+\beta\right) & x > \gamma \end{cases} \tag{2.20}$$

Dengan γ terletak pada pusat, dan β adalah lebar kurva

Kurva Beta



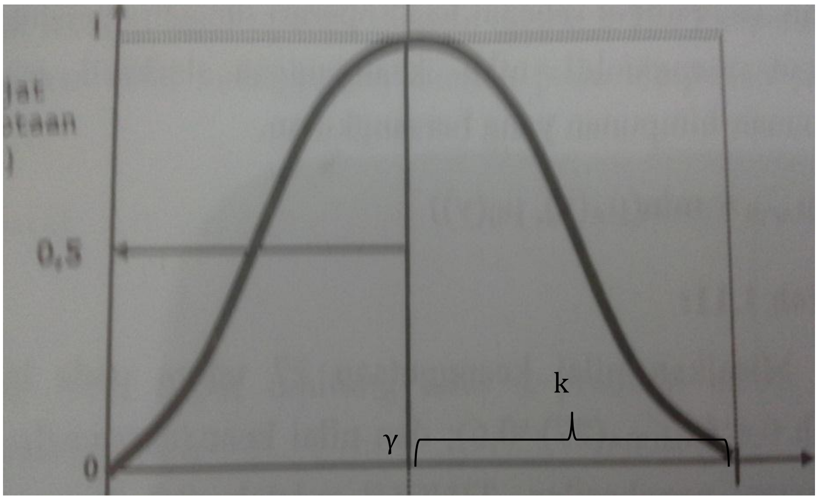
Gambar 2.15 Representasi kurva BETA

Fungsi keanggotaan kurva BETA dinotasikan sebagai berikut.

$$B(x,\gamma,\beta) = \frac{1}{1+\left(\frac{x-\gamma}{\beta}\right)^2}, \tag{2.21}$$

Dengan γ terletak pada pusat, dan β adalah setengah lebar kurva

Kurva Gauss



Gambar 2.16 Representasi Kurva GAUSS

Fungsi keanggotaan kurva GAUSS dinotasikan sebagai berikut

$$G(x,k,\gamma) = e^{-k(\gamma-x)^2} \qquad (2.22)$$

Dengan γ terletak pada pusat, dan k adalah lebar kurva.

F. *Fuzzy Decision*

Bellman dan Zadeh (Sakawa, 1993), mengenalkan tiga konsep dasar yaitu; *fuzzy goal*, *fuzzy* kendala, dan *fuzzy decision*. Misalkan *X* adalah himpunan yang memuat solusi dari pengambilan keputusan. *Fuzzy goal* G adalah himpunan *fuzzy* pada X yang keanggotaannya didefinisikan melalui fungsi keanggotaan:

$$\mu_G : X \rightarrow [0,1] \qquad (2.23)$$

Contoh 2.10. Diketahui fungsi *fuzzy*nya seperti berikut:

$$\mu_G = \begin{cases} 0 & , x \leq 10 \\ \frac{x-10}{10} & , 10 < x < 20 \\ 1 & , 20 \leq x \leq 28 \end{cases} \tag{2.24}$$

Fuzzy kendala C adalah himpunan *fuzzy* pada X yang keanggotaannya didefinisikan melalui fungsi keanggotaan:

$$\mu_C : X \rightarrow [0,1] \tag{2.25}$$

Contoh 2.11. Diketahui fungsi *fuzzy*nya seperti berikut:

$$\mu_C = \begin{cases} 0 & , x \leq 18 \\ \frac{x-18}{10} & , 18 < x \leq 28 \end{cases} \tag{2.26}$$

Fuzzy decision D adalah himpunan *fuzzy* D yang merupakan irisan *fuzzy* goal G dan *fuzzy* kendala C, yaitu D = G ∩ C dengan fungsi keanggotaan:

$$\mu_D (x) = \min \{\mu_G (x), \mu_C (x)\} \tag{2.27}$$

Contoh 2.12. Misalkan kita memiliki *fuzzy goal* dan *fuzzy* kendalanya sebagai berikut

G= fungsi *fuzzy*nya seperti pada (2.24)

C= fungsi *fuzzy*nya seperti pada (2.26)

$$\mu_D = \begin{cases} 0 & , x \leq 10 \\ \min\left(0, \frac{x-10}{10}\right) & , 10 < x \leq 18 \\ \min\left(\frac{x-10}{10}, \frac{x-18}{10}\right) & , 18 < x < 20 \\ \min\left(1, \frac{x-18}{10}\right) & , 20 \leq x < 28 \\ 1 & , x \geq 28 \end{cases} \tag{2.28}$$

Keputusan maksimal didefinisikan sebagai berikut:

$$\max_{x \in X} \mu_D(x) = \max_{x \in X} \min\{\mu_G(x), \mu_C(x)\} \quad (2.29)$$

Lebih umum, *fuzzy decision D* hasil dari *k fuzzy goal* $G_1, \ldots, G_k$ dan *m fuzzy* kendala $C_1, \ldots, C_m$ didefiinisikan oleh

$$D = G_1 \cap \ldots \cap G_k \cap C_1 \cap \ldots \cap C_m \quad (2.30)$$

Dengan fungsi keanggotaan:

$$\mu_D(x) = \min\{\mu_{G_1}(x), \ldots, \mu_{G_k}(x), \mu_{C_1}(x), \ldots, \mu_{C_m}(x)\} \quad (2.31)$$

Keputusan maksimal didefinisikan sebagai:

$$\max_{x \in X} \mu_D(x) = \max_{x \in X} \min\{\mu_{G_1}(x), \ldots, \mu_{G_k}(x), \mu_{C_1}(x), \ldots, \mu_{C_m}(x)\}.$$

G. Program linier *fuzzy* tujuan ganda

Program linier *fuzzy* tujuan ganda adalah penyelesaian dari program linier tujuan ganda menggunakan fungsi keanggotaan *fuzzy*. Misalkan program linier tujuan ganda dengan fungsi tujuan yaitu $f_1(x)$ dan $f_2(x)$

Langkah-langkah penyelesaian masalah multiobjektif dengan fungsi obyektif *fuzzy* adalah sebagai berikut.

1. Mencari solusi optimal dari masing-masing fungsi tujuan.
2. Menentukan f_i maksimal (U_i) dan f_i minimal (L_i) sehingga diketahui batas nilai dari fungsi objektif.
3. Membuat fungsi keanggotaan *fuzzy* (Sakawa, 1995).

Fungsi keanggotaan untuk masalah minimal (*fuzzy min)* pada setiap fungsi obyektif $f_i(x), i = 1, 2$ didefinisikan sebagai berikut:

$$\mu_{f_i}(x) = \begin{cases} 0 & , f_i(x) \geq U_i \\ \frac{U_i - f_i(x)}{U_i - L_i} & , L_i < f_i(x) < U_i \\ 1 & , f_i(x) \leq L_i \end{cases} \quad (2.32a)$$

Fungsi keanggotaan untuk masalah maksimal (*fuzzy max)* pada setiap fungsi obyektif $f_i(x), i = 1, 2$ didefinisikan sebagai berikut:

$$\mu_{f_i}(x) = \begin{cases} 1 & , f_i(x) \geq U_i \\ \frac{U_i - f_i(x)}{U_i - L_i} & , L_i < f_i(x) < U_i \\ 0 & , f_i(x) \leq L_i \end{cases} \tag{2.32b}$$

4. Menyelesaikan model *fuzzy*

Hasil akhir yang akan dicari merupakan keputusan maksimalnya, jika kita memiliki 2 fungsi tujuan yang berbeda kita akan mencari solusi dari sehingga diperoleh formula sebagai berikut.

$$\text{Maksimalkan } \lambda \tag{2.33}$$

$$\text{dengan kendala:}$$

$$\lambda \leq \frac{U_i - f_i(x)}{U_i - L_i}, \ i = 1, 2 \tag{2.34}$$

$\boldsymbol{\lambda}$ adalah variabel pengganti yang berarti λ adalah nilai minimal dari $\{\mu_A(x), \mu_B(x)\}$

5. Menyelesaikan program linear untuk mendapatkan nilai keanggotaan yang optimal.